

2・3

(1) すべての実数 x, y, z に対して, $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ が成立することを示せ.

(2) x, y, z は 0 でない複素数であり, $\frac{y-z}{x} = \frac{z-x}{y} = \frac{x-y}{z}$ をみたしている.

このとき, $\frac{y-z}{x} = \frac{z-x}{y} = \frac{x-y}{z}$ をより簡単な同値な式に変形せよ.

(3) $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 3$ の表す図形はどんな図形か.

本質的に変数はいくつか?

H2-3

(1) すべての複素数 x, y, z に対して, $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ が成立することを示せ.

(2) x, y が, 不等式 $\frac{1}{2}x \leq y \leq -x^2 + 3x - \frac{1}{4}$ を満たすとき,

$f(x, y) = \frac{x^2}{2x^2 - 2xy + y^2}$ の最大値と最小値を求めよ.

2.3 本質的な文字数に着目する

(1)

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

1つとみたら x, y, z の 3 変数

実はどれも差の形 $\rightarrow$ 本質的には 2 つ 2つわかるばもう1つわかる

これは、

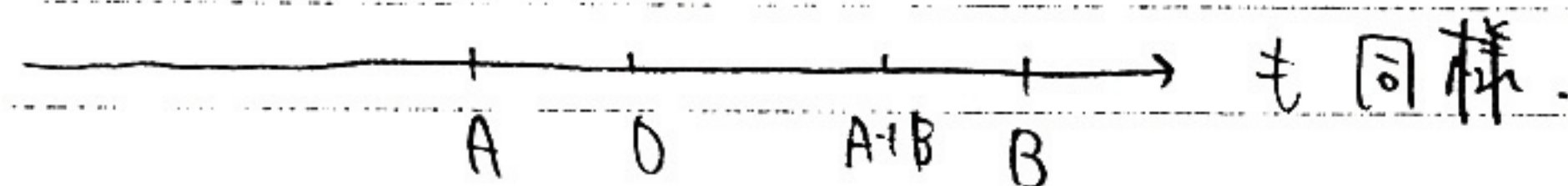
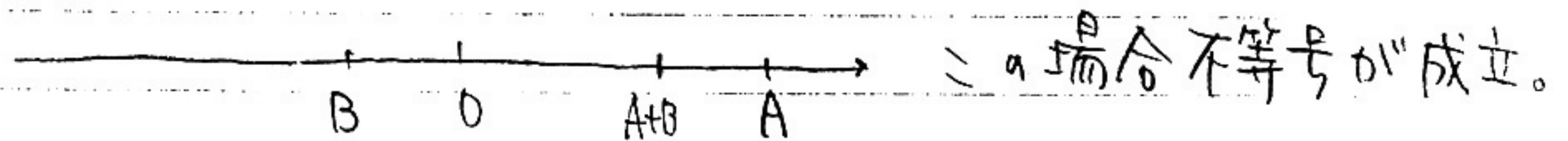
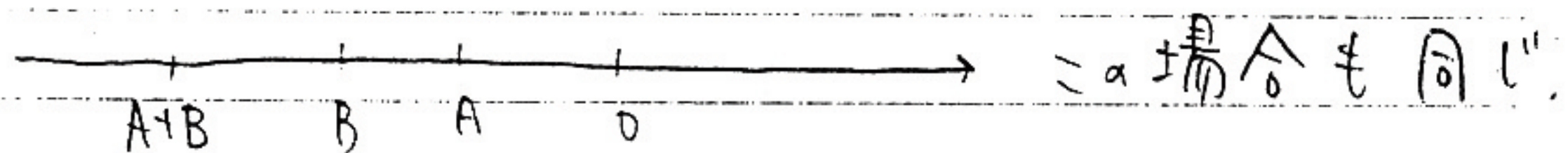
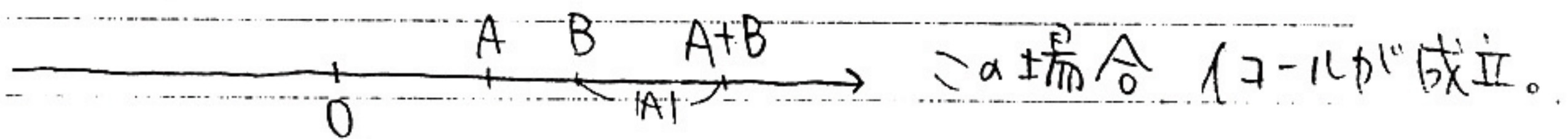
$$|(x-y) + (y-z)| \leq |x-y| + |y-z|$$

$$\begin{cases} x-y=A \\ y-z=B \end{cases} \text{ とおけば、}$$

$$(A, B \in \mathbb{R})$$

$$|A+B| \leq |A| + |B| \text{ を示すこと。 (実は2変数)}$$

こゝで $|A|$ は (数直線上で) 原点と A のキョリ。



$A=0$ or $B=0$ のときは 明らか に 成立。

(2) $x, y, z \in \mathbb{C}$ ^{複素数} $z \neq 0$ とき $x/y \neq 0$

$$\frac{y-z}{x} = \frac{z-x}{y} = \frac{x-y}{z} \text{ を簡単にする。}$$

①

(式を じつと にらむ)

① は 分母、分子 とともに 1 次 の 同次式

つまり (x, y, z) が ① をみたす

$\Rightarrow (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ も ① をみたす。

$\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$ わかれば、後全部わかる。 λ が 任意。

$$u = \frac{y}{x}, v = \frac{z}{x} \text{ とおくと}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow u - v = \frac{v}{u} - \frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{u}{v} \quad (\text{実際は本質的な文字は2つ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u-v) = v-1 \\ \text{かつ} \\ v(u-v) = 1-u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - uv = v-1 \\ uv - v^2 = 1-u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = v-u \\ u^2 - 2uv + v^2 = u+v-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u+v+1) = 0 \\ \text{かつ} \\ (u+v)^2 - 4uv = (u+v)-2 \end{cases}$$

(i) $u = v$ のとき

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y = z //$$

(ii) $u + v = -1$ のとき

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u, v \text{ は } t^2 + t + 1 = 0 \text{ の2解} \Leftrightarrow (u, v) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right) \left(\begin{smallmatrix} \text{2つの} \\ \text{解} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ かつ } \frac{z}{x} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \text{ または } \left(\frac{y}{x} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ かつ } \frac{z}{x} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x : y : z = 1 : \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} : \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{※} \\ \text{かつ} \end{array} \right. \begin{cases} y = (\cos(20^\circ) + i \sin(20^\circ))x \\ z = (\cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ))x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y = (\cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ))x \\ z = (\cos(20^\circ) + i \sin(20^\circ))x \end{cases} \right)$$

よ). これは xyz が正三角形の条件

差が本質的

$$(3^*) \quad (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 3 \dots \textcircled{1} \text{ を表す図形 (xyz空間で)}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in \textcircled{1} \xrightarrow{\text{3数とも異なる}} (x_0 + k, y_0 + k, z_0 + k) \in \textcircled{1}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ となる}$$

この直線上の点 (x_0, y_0, z_0) が $\textcircled{1}$ に含まれる。

従って、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面 $x+y+z=0$ との交わりを調べる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{点 } (x, y, z) \text{ が } \textcircled{1} \text{ と } x+y+z=0 \text{ の交わり} \\ \text{にある} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 3 \\ \text{かつ} \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0 \quad \text{or } x + y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} xy + yz + zx = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0 \quad \text{or } x + y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} xy + yz + zx = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{or } x + y + z = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

結論 ①と $x + y + z = 0$ の交わり

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と $x + y + z = 0$ の交わり



①は円柱を表している。

2.4 式を図形的にえらえ

$x, y \in \mathbb{R}$ で $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ のとき

$\frac{x+y+1}{x-y+3} (=z)$ のとりうる値

。 z という数をとるのか調べる。

例) "2" という値をとるかな?

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ \frac{x+y+1}{x-y+3} = 2 \end{cases} \quad \text{となさ } (x, y) \text{ が存在するか?}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{円 } x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ \text{直線 } x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{が交わるかな?}$$